Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

<Национальный исследовательский университет
<Высшая школа экономики>

Факультет математики

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему

Дифференциальная геометрия поверхностей Гильберта

Выполнил студент группы 2М.11.1
Быков Юрий Викторович

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., профессор Левин Андрей Михайлович

Москва 2013

Аннотация

Мы интепретируем модулярную поверхность Гильберта $H/SL_2(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ — вещественное квадратичное кольцо) как пространство, параметризующее абелевы поверхности с действием $\mathcal{O}$. Тем самым, естественные дифференциально-геометрические структуры на модулярной поверхности Гильберта должны соответствовать свойствам параметризуемых абелевых многообразий. Так, кривые
Хирцебруха-Загье параметризуют абелевы многообразия с дополнительными симметриями. Мы представляем описание этих кривых, использующее лишь элементарные методы. Во многих вопросах дифференциальной геометрии полезно иметь представление классов когомологий гладкими формами. В работе предложен кандидат гладкого представителя естественного когомологического класса Хирцебруха-Загье. Конструкция в значительной мере параллельна конструкции Загье гладкого представителя модулярного соответствия.

1 Введение

Сначала мы попробуем понять, что является (многомерным) обобщением группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ действует на множестве матриц 2×2 с нулевым следом сопряжениями и совпадает со специальной симплектической группой $Sp_1(\mathbb{Z})$. Именно группу $Sp_1(\mathbb{Z})$ мы и будем обобщать.

Рассмотрим $2k$-мерный $\mathbb{Z}$-модуль вектор-столбцов высоты $2k$. Зададимся вопросом, какие кососимметричные формы существуют на этом модуле. На этом модуле есть кососимметричная форма

$$m_1^t n_2 - m_2^t n_1, \tag{1}$$

где $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, а векторы $m_1,\ m_2,\ n_1$ и n_2 имеют высоту k. В отличие от одномерной ситуации, эта форма не является единственной: видно, что на нашем модуле живут кососимметричные формы вида

$$m_1^t D n_2 - m_2^t D n_1, \tag{2}$$

где $D = \mathrm{diag}\{\mathrm{d_1}, \dots, \mathrm{d_k}\}$ — диагональная матрица. Если D является единичной матрицей, то поляризация называется главной.

Имеет место следующее

Предложение 1.1. *Пусть M-$2k$-мерный $\mathbb{Z}$-модуль. Тогда всякая косая форма от $2k$ переменных на M приводится к виду*

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $D = \mathrm{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$ — диагональная матрица и $d_{i-1} \mid d_i$ для любого $i = 1, \dots, k$.

Доказательство. Для каждой системы образующей на M найдём элемент наименьшей нормы в соответствующей матрице. Среди всех систем выберем ту, у которой этот элемент минимален, и рассмотрим соответствующую этой системе матрицу. Заметим, что все элементы строки и столбца, в которых находится этот элемент, делятся на него. В самом деле, иначе, разделив с остатком (при помощи замены базиса), мы получили бы противоречие с минимальностью этого элемента. Без ограничения общности можно считать, что этот элемент есть a_{12}. Тогда, очевидно, матрицу формы можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, а B — матрица размера $(k-2)\times(k-2)$. Заметим, что все элементы матрицы B делятся на a_{12}. Действительно, повторяя рассуждение, использованное ранее, мы "перегоним"элемент a_{12} в k-й столбец и получим, что все элементы этого столбца делятся на a_{12} без остатка. Теперь к матрице B снова применяем то же рассуждение. Далее заменой базиса матрица

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_k \end{pmatrix},$$

где $D_i = \begin{pmatrix} 0 & d_i \\ -d_i & 0 \end{pmatrix}$, заменой базиса приводится к виду (3). $\square$

В теории модулярных форм выражение

$$z = r\tau + s,$$

где $\tau \in \mathbb{C}$, $r, s \in \mathbb{R}$, задавало решётку в случае, когда r и s — целые. Пусть теперь r и s — элементы пространства $\mathbb{R}^k$. Тогда выражение

$$z = \Omega r + s \tag{4}$$

задаёт решётку в случае, когда и r, и s лежат в $\mathbb{Z}^k$.

Предложение 1.2. *Имеют место равенства*

$$r = T(z - \overline{z}); \tag{5}$$

$$s = \Omega T\overline{z} - \overline{\Omega}Tz, \tag{6}$$

где $T = \left(\Omega - \overline{\Omega}\right)^{-1}$.

Доказательство. Равенство (5) очевидно. Подставив $r = T(z - \overline{z})$ в равенство (4) и выразив из него s, мы получим соотношение

$$s = (E - \Omega T)\, z + \Omega T \overline{z},$$

из которого сразу следует (6). $\square$

Из Предложения 1.2 следует, что имеет место равенство

$$r^t s = (z - \overline{z}) T^t \left(\Omega T \overline{z} - \overline{\Omega} T z \right). \tag{7}$$

Из-за причин, которые будут пояснены ниже, мы хотели бы, чтобы коэффициент в симплектической форме

$$r_1^t s_2 - r_2^t s_1 \tag{8}$$

при слагаемом, в которое входят z_1 и z_2, равнялся нулю. Из равенства (7) следует, что такое слагаемое имеет вид

$$-z_1^t T^t \overline{\Omega} T z_2 + z_2^t T^t \overline{\Omega} T z_1. \tag{9}$$

Отсюда мы приходим к соотношению

$$z_1^t T^t \left(\overline{\Omega} - \overline{\Omega}^t \right) T z_2 = 0,$$

из которого видно, что матрица, которую мы хотим рассматривать должна быть симметричной.

Упражнение 1.1. *Какое условие будет в случае, если поляризация не будет главной?*

Ответ. Рассуждая по аналогии со случаем главной поляризации, мы получаем, что матрица Ω должна удовлетворять соотношению

$$z_1^t T^t \left(D\overline{\Omega} - \overline{\Omega}^t D^t \right) T z_2 = 0,$$

откуда мы получаем, что элементы матрицы $\Omega = (\omega_{ij})$ должны удовлетворять соотношению $\omega_{ij} = (d_j/d_i)\omega_{ji}$.

Определение 1.1. Фактор $\mathbb{C}^2$ по полученной симплектической форме называется абелевым многообразием.

Далее в симплектической форме (16) мы хотим сделать замену координат

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{r} \\ \widetilde{s} \end{pmatrix} \tag{10}$$

так, чтобы выполнялось условие

$$r_1^t s_2 - r_2^t s_1 = \widetilde{r_1}^t \widetilde{s_2} - \widetilde{r_2}^t \widetilde{s_1}. \tag{11}$$

Сделаем указанную замену:

$$r_1^t s_2 - r_2^t s_1 = \left(\widetilde{r_1}^t A^t + \widetilde{s_1}^t B^t\right)\left(C\widetilde{r_2} + D\widetilde{s_2}\right) - \left(\widetilde{r_2}^t A^t + \widetilde{s_2}^t B^t\right)\left(C\widetilde{r_1} + D\widetilde{s_1}\right).$$

Потребовав выполнение условия (11) мы получим систему равенств

$$\begin{cases} A^t C - C^t A = 0, \\ B^t D - D^t B = 0, \\ A^t D - C^t B = E. \end{cases}$$

Заметим, что для группы SL_2 первые два равенства выполнены автоматически. Получили набор тождеств. Теперь для матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ явно выписывается левая обратная: $\begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}$. Мы получили явное описание Sp.

Теперь запишем

$$z = \Omega r + s = \Omega\left(A\widetilde{r} + B\widetilde{s}\right) + \left(C\widetilde{r} + D\widetilde{s}\right) = \left(\Omega A + C\right)\widetilde{r} + \left(\Omega B + D\right)\widetilde{s}.$$

Мы хотим, чтобы коэффициент при $\widetilde{s}$ был равен единице, поэтому делаем замену

$$\widetilde{z} = \left(\Omega B + D\right)^{-1} z,$$

которая влечёт за собой замену $\widetilde{\Omega} = \left(\Omega B + D\right)^{-1}\left(\Omega A + C\right)$.

Предложение 1.3. *Преобразование*

$$\widetilde{\Omega} = \left(\Omega B + D\right)^{-1}\left(\Omega A + C\right)$$

задаёт действие симплектической группы на верхней полуплоскости Зигеля.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\widetilde{\Omega}$ является симметричной матрицей. Проверим, что матрица $\mathrm{Im}\widetilde{\Omega}$ положительно определена. Во избежание путаницы обозначений будем временно писать Ω_N вместо $\widetilde{\Omega}$. Тогда нам нужно проверить, что матрица $\Omega_N - \overline{\Omega_N}$ положительно определена. Здесь мы применим небольшой трюк — вместо этого мы проверим положительную определённость матрицы $\Omega_N - \overline{\Omega_N}^t$. Непосредственная проверка показывает, что имеет место равенство

$$\Omega_N - \overline{\Omega_N}^t = J\left(\Omega - \overline{\Omega}^t\right)\overline{J}^t,$$

где $J = \left(\Omega B + D\right)^{-1}$, которое доказывает положительную определённость матрицы $\Omega_N - \overline{\Omega_N}^t$, и, тем самым, положительную определённость матрицы $\Omega_N - \overline{\Omega_N}$. $\square$

2 Абелевы поверхности с вещественным умножением

2.1 $\mathcal{O}$-решётки в $\mathbb{R}^2$

Нас будут интересовать абелева многообразия с нетривиальным кольцом эндоморфизмов ([3]). Далее мы везде считаем, что $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ — вещественное квадратичное поле. Имеет место каноническое разложение

$$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Соответствие задаётся условием

$$(a + b\sqrt{D}) \otimes_{\mathbb{Q}} x \longleftrightarrow (ax + bx\sqrt{D},\ ax - bx\sqrt{D}) = (\sigma_1, \sigma_2), \tag{12}$$

где $a, b \in \mathbb{Q},\ D \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{O}$ — кольцо целых поля $\mathbb{F}$. Рассмотрим $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathcal{O}$; $\mathfrak{a}$ и $\mathcal{O}$ являются $\mathbb{Z}$-решётками полного ранга в $\mathbb{F}$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{F}.$$

Замечание 2.1. Включение $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$ очевидно, так как $\mathcal{O} \subset \mathbb{F}$ и $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$; содержательность утверждения заключается в том, что на самом деле имеет место равенство.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{F}$ — алгебраическое число. Тогда найдётся $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $n\alpha$ — целое алгебраическое число (для того, чтобы в этом убедиться, достаточно подставить $n\alpha$ в минимальный многочлен элемента α). Отсюда мы получаем, что $\alpha = \beta \cdot (1/n)$, где β —целый алгебраический элемент, а $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, откуда следует нужное равенство. □

Предложение 2.2. *Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathcal{O}$, то имеет место равенство*

$$\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathfrak{a}$, тогда имеет место включение $(a\mathcal{O}) \subset \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$, из которого следует включение

$$a\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}. \tag{13}$$

Векторные пространства, стоящие слева и справа в последнем включении имеют одинаковую размерность над $\mathbb{Z}$, поэтому они изоморфны. Значит, на самом деле все включения в (13) являются равенствами, откуда следует доказываемое утверждение. □

Предложение 2.3. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Доказательство. Используя ассоциативность тензорного произведения, мы получаем

$$\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) = (\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

Последнее равенство следует из выкладки

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \big(\mathbb{Q}[x]/(x^2 - D)\big) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R}[x]/(x^2 - D) = \\ = \mathbb{R}[x]/(x - \sqrt{D}) \oplus \mathbb{R}[x]/(x + \sqrt{D}). \end{aligned}$$

□

Таким образом, **мы научились строить нетривиальные решётки в $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ с помощью произвольного идеала $\mathfrak{a}$**. Идеал $\mathfrak{a}$ имеет много автоморфизмов, а именно $|\mathcal{O}^*|$. Как $\lambda \in \mathcal{O}$ действуют на $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$? Ответ на этот вопрос даёт формула (12): первое $\mathbb{R}$ умножается на $\sigma_1(\lambda)$, а второе — на $\sigma_2(\lambda)$. Тем самым, эндоморфизмы решётки индуцируются линейными преобразованиями $\mathbb{R}^2$. На модуле $\mathcal{O} \oplus a$ есть форма Ω, которая сопоставляет паре $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, где p и r лежат в $\mathcal{O}$, а q и s лежат в a, число

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) = tr(ps - rq). \tag{14}$$

После овеществления эта поляризация превращается в форму

$$dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2.$$

2.2 $\mathcal{O}$-решётки в $\mathbb{C}^2$

Пусть элемент $\alpha + \beta\sqrt{D} \oplus \gamma + \delta\sqrt{D}$ лежит в $\mathcal{O} \oplus a$. Тогда вложим $\mathcal{O} \oplus a$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ следующим образом. Сначала вложим $\mathcal{O} \oplus a$ в $\mathbb{R}^4$:

$$\alpha + \beta\sqrt{D} \oplus \gamma + \delta\sqrt{D} \longmapsto (x_1, x_2, y_1, y_2),$$

где $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\alpha + \beta\sqrt{D}, \alpha - \beta\sqrt{D}, \gamma + \delta\sqrt{D}, \gamma - \delta\sqrt{D})$. Теперь, выбрав произвольные τ_1 и τ_2 из верхней полуплоскости, посредством отождествления

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \tau_1 y_1, \\ z_2 = x_2 + \tau_2 y_2, \end{cases}$$

мы получаем вложение $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, и, тем самым, искомое вложение $\mathcal{O} \oplus a$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. При этом действие $\sqrt{D}$ на модуле M действительно является $\mathbb{C}$-линейным. Здесь поляризация имеет вид

$$dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2.$$

3 Разложимые абелевы поверхности с вещественным умножением.

Будем называть абелеву поверхность разложимой, если она является произведением двух эллиптических кривых. Тем самым, такая четырёхмерная решётка является суммой двух двумерных решёток, каждая из которых по отдельности вкладывается в $\mathbb{C}$.

Рассмотрим L — решётку в $\mathbb{C}$ и L' — подрешётку в L индекса $D \in \mathbb{N}$. Тогда решётка DL вкладывается в L', потому что группа L/L' имеет порядок D, так что любой элемент из DL переходит в 0 при этой факторизации. Значит, имеет место соотношение

$$L \to DL \subset L' \subset L.$$

На решётке $L \oplus L' \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ можно задать действие кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Это действие индуцировано $\mathbb{C}$-линейным преобразованием $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$. Таким образом, четырёхмерная решётка $L \oplus L'$ является $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$-модулем. Обозначим этот модуль M.

Мы постараемся дать ответы на некоторые вопросы, связанные с этим модулем.

1) Как разложить этот модуль в прямую сумму двух идеалов и заставить порядок $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ действовать $\mathbb{C}$-линейно на M?

2) На модуле M есть поляризация (на L и на L' отдельно). Как устроена эта поляризация с точки зрения двух идеалов из первого пункта?

3.1 Действие $\mathcal{O}$ на сумме двух решёток.

Начнём с разбора первого вопроса. Из Предложений 2.1 и 2.2 вытекает, что имеет место изоморфизм

$$(L \oplus L') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq (\mathcal{O} \oplus \mathfrak{a}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \tag{15}$$

где $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал в $\mathcal{O}$. Здесь в общем случае мы считаем, что $\mathcal{O}$ — это порядок $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{D}$ вещественного квадратичного поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$; в случае, когда D даёт остаток 3 при делении на 4, этот порядок совпадает с кольцом целых поля $\mathbb{F}$.

Далее мы считаем, что $D = 4k + 2$ или $D = 4k + 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и D свободно от квадратов. Зададим действие кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ на $L \oplus L'$ по следующему правилу: $\sqrt{D}$ действует на L' вложением в L, а на L — умножением на D и последующим вложением в L'. Тогда ответ на первый вопрос даёт

Теорема 3.1. *Имеет место изоморфизм $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$-модулей.*

$$L \oplus L' \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}.$$

Доказательство. Пусть $L =< e_1, e_2 >_{\mathbb{Z}}$, а $L' =< f_1, f_2 >_{\mathbb{Z}}$, где

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Так как L' — индекса D в L, то $ad - bc = D$.

В соответствии с определённым выше действием кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ на M, матрица умножения на $\sqrt{D}$ в базисе e_1, e_2, f_1, f_2 пространства $L \oplus L'$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \\ d & -c & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В базисе $1, \sqrt{D}_1, 1, \sqrt{D}_2$ пространства $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ матрица умножения на $\sqrt{D}$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наша задача — выбрать базис в пространстве $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ так, чтобы матрица умножения на $\sqrt{D}$ в этом базисе совпадала с матрицей A.

По теореме о Нормальной форме Смита мы можем выбрать базисы в L и L' согласованно: $L =< e_1, e_2 >_{\mathbb{Z}}$, а $L' =< e_1, De_2 >_{\mathbb{Z}}$. Тогда легко видеть, что матрица

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является решением уравнения

$$XA = BX$$

и обратима над $\mathbb{Z}$. Поэтому матрица X задаёт отображение из $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ в $L \oplus L'$, которое является изоморфизмом. □

Замечание 3.1. Полученный изоморфизм не является каноническим, его легко "подправить". Пусть теперь a, d лежат в $\mathcal{O}$, b лежит в $\mathfrak{D}$, а c лежит в $\mathfrak{D}^{-1}$ и $ad - bc = 1$. Тогда на паре τ_1, τ_2 действует матрица $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Действие определено так: выше было сказано, что $\mathcal{O}$ можно вложить в $\mathbb{R}$ двумя способами. На τ_1 действует матрица M_1, которая получается из M первым вложением её коэффициентов в $\mathbb{R}$, а на τ_2 действует матрица M_2, которая получается из M вторым вложением её коэффициентов в $\mathbb{R}$.

Открытые вопросы

Предложение 3.1. *Пусть L — решётка в $\mathbb{C}$, $L =< \tau, 1 >$. Пусть решётка L' — подрешётка индекса D в L. Тогда в L' можно выбрать базис так, чтобы $L' =< a\tau + b, d >$, где $ad = D$, причём $b < d$.*

Нас сейчас интересует, как связаны пара $\left(\tau, \frac{a\tau+b}{d}\right)$, отвечающая паре решётка-подрешётка с базисом Смита, который был выбран в Теореме 3.1.

Пусть e_1, e_2 — образующие в L, а f_1, f_2 — образующие в L'. Тогда по определённому выше действию оператора $\sqrt{D}$ на $L \oplus L'$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{D} f_1 &= e_1, \\ \sqrt{D} e_2 &= f_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что f_1, e_2, $\sqrt{D} f_1$, $\sqrt{D} e_2$ — свободные $\mathbb{Z}$-образующие в $L \oplus L'$, а f_1 и e_2 — свободные $\mathcal{O}$-образующие в $L \oplus L'$. Отметим, что на модуле $L \oplus L'$ есть унимодулярная форма $<,>$, для которой двойственная к z совпадает с z. Для этой формы на $L \oplus L'$ мы имеем

$$\begin{cases} < e_1, e_2 >=< f_1, f_2 >= 1, \\ < e_i, f_j >= 0. \end{cases}$$

Пусть $e_1 = x\tau + y$, $e_2 = z\tau + w$. Тогда при указанном выборе базисов в решётках L и L' мы имеем $f_1 = x\tau + y$, $f_2 = Dz\tau + Dw$. Мы рассмотрим два вложения $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$-модуля $M = L \oplus L'$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

При первом вложении векторы из L переходят в первую копию $\mathbb{C}$, а векторы из L' — во вторую копию $\mathbb{C}$. Так, вектор f_1 переходит в $(0, x\tau + y)$, e_1 — в $(x\tau + y, 0)$, вектор e_2 — в $(z\tau + w, 0)$, а вектор f_2 — в $(0, Dz\tau + Dw)$:

$$\begin{array}{ccc} L \oplus L' & \hookrightarrow & \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ f_1 & \longmapsto & (0, x\tau + y) \\ e_1 & \longmapsto & (x\tau + y, 0) \\ e_2 & \longmapsto & (z\tau + w, 0) \\ f_2 & \longmapsto & (0, Dz\tau + Dw) \end{array}$$

Теперь поговорим про второе вложение. Пусть m — идеал в кольце целых $\mathcal{O}$. Тогда на модуле $\mathcal{O} \oplus m$ есть форма Ω, которая сопоставляет паре $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, где p и r лежат в $\mathcal{O}$, а q и s лежат в m, число

$$\Omega\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}\right) = tr(ps - rq). \tag{16}$$

Естественно потребовать от формы Ω, чтобы она действовала на векторах из $\mathcal{O} \oplus m$ так же, как и вышеупомянутая форма, действовавшая на $L \oplus L'$. Если теперь в качестве m взять $\mathcal{O}$, то есть рассматривать модуль M как прямую сумму $\mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2$, где $\mathcal{O}_1$ порождено векторами f_1 и $\sqrt{D} f_1 = e_1$, а $\mathcal{O}_2$

порождено векторами e_2 и $\sqrt{D}e_2 = f_2$. то форма, определённая равенством (16), действует не так, как форма $<,>$ на $L \oplus L'$. В самом деле, для формы Ω, определённой на $\mathcal{O}f_1 + \mathcal{O}e_2$, мы имеем

$$\Omega(f_1, e_2) = tr(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq < f_1, e_2 >= 0.$$

Поэтому мы будем вкладывать в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ модуль $\mathcal{O} \oplus D^{-1}$, где D^{-1} — дифферента кольца $\mathcal{O}$,

$$D^{-1} = \langle \tfrac{1}{2\sqrt{D}} e_2, \tfrac{1}{2} f_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Мы вправе так поступать, потому что

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \cong \mathcal{O} \oplus D^{-1}$$

как модули. Легко видеть, что идеал D^{-1} является двойственным к $\mathcal{O}$ относительно следа: если $a \in \mathcal{O}$, а $b \in \mathcal{D}^{-1}$, то $tr(ab) \in \mathbb{Z}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно провести лёгкую проверку для образующих $\mathcal{O}$ и D^{-1}. Также нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
&\Omega(e_1, e_2) = tr(\sqrt{D} \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{D}} - 0 \cdot 0) = tr \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 =< e_1, e_2 >, \\
&\Omega(f_1, f_2) = tr(1 \cdot \tfrac{1}{2} - 0 \cdot 0) = tr \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 =< f_1, f_2 >, \\
&\Omega(f_1, e_2) = tr(1 \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{D}} - 0 \cdot 0) = tr \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2D} & 0 \end{pmatrix} = 0 =< f_1, e_2 >, \\
&\Omega(f_1, e_1) = \Omega(f_2, e_2) = tr(0 - 0) = 0 =< f_1, e_1 >=< f_2, e_2 >, \\
&\Omega(f_2, e_1) = tr(0 \cdot 0 - \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{D}) = tr \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0 =< f_2, e_1 > .
\end{aligned}$$

Пусть элемент $\alpha + \beta\sqrt{D} \oplus \gamma + \delta\sqrt{D}$ лежит в $\mathcal{O} \oplus D^{-1}$. Тогда вложим $\mathcal{O} \oplus D^{-1}$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ следующим образом. Сначала вложим $\mathcal{O} \oplus D^{-1}$ в $\mathbb{R}^4$:

$$\alpha + \beta\sqrt{D} \oplus \gamma + \delta\sqrt{D} \longmapsto (x_1, x_2, y_1, y_2),$$

где $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\alpha + \beta\sqrt{D}, \alpha - \beta\sqrt{D}, \gamma + \delta\sqrt{D}, \gamma - \delta\sqrt{D})$. Теперь, выбрав произвольные τ_1 и τ_2 из верхней полуплоскости, посредством отождествления

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \tau_1 y_1, \\ z_2 = x_2 + \tau_2 y_2, \end{cases}$$

мы получаем вложение $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, и, тем самым, искомое вложение $\mathcal{O} \oplus D^{-1}$ в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. При этом действие $\sqrt{D}$ на модуле M действительно является $\mathbb{C}$-линейным. Отсюда видно, что при таком вложении вектор f_1 переходит в пару $(1,1)$, вектор e_1 переходит в $(\sqrt{D}, -\sqrt{D})$, вектор e_2 переходит в пару $(\frac{1}{2\sqrt{D}}\tau_1, -\frac{1}{2\sqrt{D}}\tau_2)$, а вектор f_2 — в пару $(\frac{1}{2}\tau_1, -\frac{1}{2}\tau_2)$. Это вложение удобно изобразить в виде таблицы:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}\oplus D^{-1} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^4 & \hookrightarrow & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \\
f_1 & \longmapsto & (1,1,0,0) & \longmapsto & (1,1) \\
e_1 & \longmapsto & (\sqrt{D}, -\sqrt{D}, 0, 0) & \longmapsto & (\sqrt{D}, -\sqrt{D}) \\
e_2 & \longmapsto & (0,0,\frac{1}{2\sqrt{D}}, -\frac{1}{2\sqrt{D}}) & \longmapsto & (\frac{1}{2\sqrt{D}}\tau_1, -\frac{1}{2\sqrt{D}}\tau_2) \\
f_2 & \longmapsto & (0,0,\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & \longmapsto & (\frac{1}{2}\tau_1, -\frac{1}{2}\tau_2) \\
 & & (\alpha,\beta,\gamma,\delta) & \longmapsto & (\alpha+\gamma\tau_1, \beta+\delta\tau_2)
\end{array}$$

Из условия того, что образы базисных векторов при одном вложении выражаются линейным образом через образы этих векторов в другом вложении, мы получаем связь между τ_1, τ_2 и τ. Если (w_1, w_2) — образ произвольного элемента из $L+L'$ при первом вложении, а (z_1, z_2) — образ того же самого элемента (рассматриваемого как элемент из $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}$) при втором вложении, то мы требуем выполнения условия

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Записав это условие для четырёх базисных векторов, мы приходим к системе

$$\begin{cases}
A+B=0, \\
C+F=x\tau+y, \\
(A-B)\sqrt{D}=x\tau+y, \\
(C-F)\sqrt{D}=0, \\
\frac{1}{2\sqrt{D}}(A\tau_1-B\tau_2)=z\tau+w, \\
\frac{1}{2\sqrt{D}}(C\tau_1-F\tau_2)=0, \\
\frac{1}{2}(A\tau_1+B\tau_2)=0, \\
\frac{1}{2}(C\tau_1+F\tau_2)=Dz\tau+Dw,
\end{cases}$$

решив которую, мы получаем, связь между τ_1, τ_2 и τ :

$$\tau_1=\tau_2=2D\frac{z\tau+w}{x\tau+y}. \tag{17}$$

Сформулируем полученные результаты. Рассмотрим решётку $L=<\tau,1>$ в $\mathbb{C}$ и её подрешётку $L'=<a\tau+b,d>$ индекса D. Пусть m — идеал в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}\oplus m$ — модуль над $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, изоморфный модулю $M=L\oplus L'$, причём унимодулярная форма (16) на $\mathcal{O}\oplus m$ совпадает с формой $<,>$ на M. Тогда в качестве m можно взять дифференту $\mathfrak{D}^{-1}$ кольца $\mathcal{O}$. Тогда выбрав значения для τ_1 и τ_2, указанные в формуле (17), мы получим $\mathbb{C}^2$-линейное вложение модуля $\mathcal{O}\oplus\mathfrak{D}^{-1}$ в $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$.

Гипотеза.

Пусть $\mathcal{O}\oplus D^{-1}$ вложено в $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ способом, рассмотренным выше, с $\tau_1 = \tau_2$. Тогда $\mathcal{O} \oplus D^{-1}$ может быть представлена как прямая сумма двух эллиптических кривых (двумерных решёток).

3.2 Примеры "подскока" алгебры эндоморфизмов решётки.

Рассмотрим решётку $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3 \oplus \mathbb{Z}e_4$, где e_i лежат в $\mathbb{C}^2$. Выше было пояснено, что в связи с наличием симплектической формы следует вкладывать эту решётку в $\mathbb{C}^2$ таким образом: вектор e_1 отождествляется с вектором $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, вектор e_2 отождествляется с вектором $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, вектор e_3 отождествляется с вектором $\begin{pmatrix}\Omega_{11}\\\Omega_{12}\end{pmatrix}$, а вектор e_4 — с вектором $\begin{pmatrix}\Omega_{12}\\\Omega_{22}\end{pmatrix}$.

Чем более специальный вид имеет наша решётка, тем больше будет алгебра её эндоморфизмов. На произвольной чётырёхмерной решётке в $\mathbb{C}^2$ действует алгебра эндоморфизмов $\mathbb{Z}$ (умножением на целое число n). Если четырёхмерная решётка разваливается в сумму $L \oplus M$ двух двумерных решёток (этому случаю отвечает $\Omega_{12} = 0$), то алгебра эндоморфизмов этой решётки будет богаче, чем в общем случае: на такой решётке действует алгебра $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$: элементу (m, n) из $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ сопоставляется решётка $mL \oplus nM$. В нашем случае эта четырёхмерная решётка развалилась не просто в прямую сумму произвольных двумерных решёток, но в прямую сумму двумерной решётки и её подрешётки индекса D. Напомним, что на $L \oplus L'$ было определено действие оператора $\sqrt{D}$ по следующему правилу: $\sqrt{D}$ действовал на L' вложением в L, а решётку L умножал на число D и вкладывал в L'. Тем самым, на $L \oplus L'$ помимо группы эндоморфизмов $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ действует группа эндоморфизмов $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

Мы собираемся обсудить следующие вопросы.

1) Есть ли у решётки $L \oplus L'$ другие эндоморфизмы, кроме эндоморфизмов из групп $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$?

2) В множестве всех четырёхмерных решёток в $\mathbb{C}^2$ можно рассмотреть два подсемейства. Первое семейство составляют решётки, разваливающиеся в прямую сумму двух двумерных. Во второе семейство включим решётки, на которых действует группа эндоморфизмов $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Очевидно, что решётка $L \oplus L'$, где L' — подрешётка индекса D в L, лежит в пересечении этих двух семейств. Верно ли, что пересечение состоит ровно из таких решёток?

3) Бывают ли такие четырёхмерные решётки в $\mathbb{C}^2$, на которых одновременно действуют $\mathbb{Z}[\sqrt{D_1}]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{D_2}]$?

По второму вопросу. Если D не свободно от квадратов, то ответ на него отрицательный. В частности, если D есть полный квадрат, то на решётке, являющейся суммой двух двумерных, действует оператор $I = \begin{pmatrix}\sqrt{D} & 0\\ 0 & \sqrt{D}\end{pmatrix}$, который действует на первом слагаемом прямой суммы умножением на $\sqrt{D}$, а на втором — умножением на $-\sqrt{D}$, причём, $I^2 = D$.

Далее мы полагаем, что D свободно от квадратов. Пусть четырёхмерная решётка в $\mathbb{C}^2$ есть прямая сумма $L \oplus M$ двух двумерных решёток. Все эндоморфизмы решётки $L \oplus M$ имеют вид

$$End(L \oplus M) = \begin{pmatrix} End\ L & Hom(M, L) \\ Hom(L, M) & End\ M \end{pmatrix}.$$

Пусть наша решётка вложена в $\mathbb{C}^2$ так, что L вложена в $\mathbb{C}_1$, а M вложена в $\mathbb{C}_2$. Пусть на решётке действует оператор $I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, такой, что $I^2 = D = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Отсюда мы получаем, что должны быть выполнены равенства

$$\begin{cases} a^2 + bc = D, \\ ab + bd = 0, \\ ca + dc = 0, \\ cb + d^2 = D, \end{cases}$$

где a и d есть линейные операторы в $\mathbb{C}$, то есть комплексные числа, b — это вложение $\mathbb{C}_2$ в $\mathbb{C}_1$, а c — это вложение $\mathbb{C}_1$ в $\mathbb{C}_2$.

Так как D свободно от квадратов,то из второго уравнения системы мы получаем, что $b \neq 0$ и $a = -d$. Условие $b \neq 0$ означает, что решётки L и M изогенны.

$$\begin{array}{ccccc} M & : & \mathbb{Z}^2 & \subset & \mathbb{C}_1 \\ \cap & & \downarrow & & \downarrow \\ L & : & \mathbb{Z}^2 & \subset & \mathbb{C}_2 \end{array}$$

Начнём с обсуждения последнего вопроса. Рассмотрим алгебру над $\mathbb{Q}$, которая получается присоединением к $\mathbb{Q}$ антикоммутирующих элементов $\sqrt{d_1}$ и $\sqrt{d_2}$ и $\sqrt{-d_1 d_2}$. Положим $i^2 = d_1$, $j^2 = d_2$, $k = ij = -ji$, тогда $k^2 = -d_1 d_2$. Обозначим это расширение $H^{\mathbb{Q}}_{d_1,d_2}$. В случае $d_1 = d_2 = -1$ мы получаем привычное тело кватернионов.

Рассмотрим решётку

$$\Delta = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k$$

целых кватернионов в $H^{\mathbb{Q}}_{d_1,d_2}$ и два её разных вложения в $\mathbb{C}^2$.

Опишем первое вложение. Зададим отображение φ из $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ в $Mat_2(\mathbb{R})$ на базисных векторах решётки:

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varphi(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{d_1} \end{pmatrix},$$

$$\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \varphi(k) = \varphi(i)\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & d_2\sqrt{d_1} \\ -\sqrt{d_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что φ инъективно и сюрьективно, а потому имеет место изоморфизм

$$(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}j+\mathbb{Z}k)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}\cong Mat_2(\mathbb{R}).$$

Отождествим теперь $Mat_2(\mathbb{R})$ с $\mathbb{C}^2$ следующим образом: элементу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $Mat_2(\mathbb{R})$ поставим в соответствие элемент $\begin{pmatrix} a+b\tau \\ c+d\tau \end{pmatrix}$ из $\mathbb{C}^2$. Такое отождествление выбрано из тех соображений, что решётка Δ действует на себе умножениями слева; аналогично $Mat_2(\mathbb{R})$ действует на себе умножениями слева. Очевидно, что при таком отождествлении вложение нашей решётки в $\mathbb{C}^2$ будет $\mathbb{C}$-линейным.

При втором вложении элементу $a+bi+cj+dk$ решётки Δ сопоставляется четвёрка (x_1,x_2,y_1,y_2), где

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)=\left(a+b\sqrt{D_1},a-b\sqrt{D_1},\frac{c+d\sqrt{D_1}}{2\sqrt{D_1}},\frac{-c+d\sqrt{D_1}}{2\sqrt{D_1}}\right).$$

Теперь, выбрав произвольные τ_1 и τ_2 из верхней полуплоскости, посредством отождествления

$$\begin{cases} z_1=x_1+\tau_1 y_1, \\ z_2=x_2+\tau_2 y_2, \end{cases}$$

мы получаем вложение $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, и, тем самым, искомое вложение Δ в $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$. Мы хотим вкладывать решётку Δ именно таким способом из тех соображений, что во-первых имеет место изоморфизм

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i+\mathbb{Z}j+\mathbb{Z}k=(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)\oplus(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)\,j\cong\mathcal{O}\oplus\mathcal{O},$$

где $\mathcal{O}=\mathbb{Z}[\sqrt{D_1}]$, а во-вторых, опыт подсказывает, что вместо второго кольца целых следует брать дифференту $\mathfrak{D}^{-1}$ кольца $\mathcal{O}$.

Это вложение удобно изобразить в виде таблицы:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}\oplus\mathfrak{D}^{-1} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^4 & \hookrightarrow & \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \\
1 & \longmapsto & (1,1,0,0) & \longmapsto & (1,1) \\
i & \longmapsto & (\sqrt{D_1},-\sqrt{D_1},0,0) & \longmapsto & (\sqrt{D_1},-\sqrt{D_1}) \\
j & \longmapsto & (0,0,\frac{1}{2\sqrt{D_1}},-\frac{1}{2\sqrt{D_1}}) & \longmapsto & (\frac{1}{2\sqrt{D_1}}\tau_1,-\frac{1}{2\sqrt{D_1}}\tau_2) \\
k & \longmapsto & (0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) & \longmapsto & (\frac{1}{2}\tau_1,-\frac{1}{2}\tau_2) \\
 & & (\alpha,\beta,\gamma,\delta) & \longmapsto & (\alpha+\gamma\tau_1,\beta+\delta\tau_2)
\end{array}$$

Из условия того, что образы базисных векторов при одном вложении выражаются линейным образом через образы этих векторов в другом вложении, мы получаем связь между τ_1, τ_2 и τ. Если (w_1,w_2) — образ произвольного элемента из Δ при первом вложении, а (z_1,z_2) —

образ того же самого элемента при втором вложении, то мы требуем выполнения условия

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Записав это условие для четырёх базисных векторов, мы приходим к системе

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ C + F = \tau, \\ A - B = 1, \\ C - F = -\tau, \\ \frac{1}{2\sqrt{D_1}}(A\tau_1 - B\tau_2) = D_2\tau, \\ \frac{1}{2\sqrt{D}}(C\tau_1 - F\tau_2) = 1, \\ \frac{1}{2}(A\tau_1 + B\tau_2) = -\sqrt{D_1}D_2\tau, \\ \frac{1}{2}(C\tau_1 + F\tau_2) = -\sqrt{D_1}, \end{cases}$$

решив которую, мы получаем, связь между τ_1, τ_2 и τ :

$$\begin{cases} \tau_1 = 2\sqrt{D_1}D_2\tau, \\ \tau_2 = -2\sqrt{D_1}/\tau, \end{cases} \tag{18}$$

откуда следует, что $\tau_1\tau_2 = -4D_1D_2$. Интересно сравнить формулы (18) с полученными ранее формулами (17).

3.3 Гладкий представитель класса Хирцебруха-Загье.

Пусть $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — целочисленная матрица с положительным определителем D. Следуя Загье (см. [2]), рассмотрим связанную с матрицей M форму

$$j_M(\tau, \tau') = c\tau'\tau + d\tau' + a\tau + b = (c\tau + d)\left(\tau' + \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), \tag{19}$$

где τ, τ' отвечают различным эллиптическим кривым L и L'. Очевидно, что форма тождественно равна нулю в том, и только в том случае, когда кривые L и L' изогенны с $\tau' = -\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.

Заметим, что форма (19) удовлетворяет равенству

$$j_M(g(\tau), \tau') = (c\tau + d)^{-1} j_{Mg}. \tag{20}$$

Выражение

$$\gamma_M = \left((a_1\tau_1 + b_1)/(c_1\tau_1 + d_1) + (a_2\tau_2 + b_2)/(c_2\tau_2 + d_2)\right)(c_1\tau_1 + d_1)(c_2\tau_2 + d_2),$$

где τ и τ' связаны с τ_1 и τ_2 формулами (17), является аналогом формы (19). Мотивация здесь состоит в том, что, как и для формы (20), тождественное обращение этого выражения в ноль означает "подскок" эндоморфизмов решётки. В работе [2] рассматривается сумма

$$\sum_M j_M(\tau, \tau')^{-k} \tag{21}$$

по всем M из $SL_2(\mathbb{Z})$. Выражение

$$\sum_M \gamma_M(\tau_1, \tau_2)^{-k}. \tag{22}$$

является аналогом этой суммы и является кандидатом на гладкого представителя естественного когомологического класса Хирцебруха-Загье.

Список литературы

[1] J. B. Bruinier, *Hilbert modular forms and their applications*, summer school at the Sophus Lie Conference Center 2004,

[2] Д. Цагир, *Формула следа Эйхлера-Сельберга для $SL_2(\mathbb{Z})$*, приложение к книге С. Ленг, *Теория модулярных форм*, издательство "Мир" 1979,

[3] G. van der Geer, *Hilbert modular surfaces*, Mathematisch Instituut Universiteit van Amsterdam 1987,